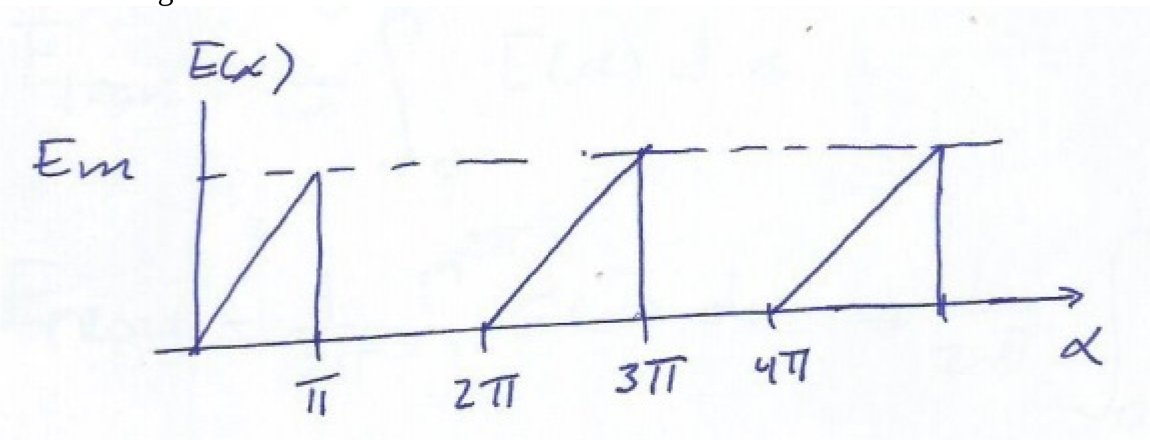
Johnny Rengifo
Editada por Jose Soto

Prepa 2

Problema 1:

Dada la siguiente forma de onda:



Hallar:
1. Valor eficaz (R.M.S.).
2. Valor promedio.
3. Factor de forma.

Solucion:

Primero se escribe la ecuacion que describe la tensión $E(\alpha)$

$$E(\alpha)=\left\{\begin{matrix} \frac{E_m}{\pi}\alpha \leftarrow si\ \alpha\ \ pertenece\ a\ [k\pi,(k+1)\pi],\ k=0,2,4... \\ 0 \leftarrow si\ \alpha\ \ pertenece\ a\ [k\pi,(k+1)\pi],\ k=1,3,5... \end{matrix}\right\}$$

La tensión $E(\alpha)$ es periódica, y su periodo es 2π como se observa en la figura.

1)Valor eficaz:

$$E_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (E(\alpha))^2\cdot d\alpha}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{E_m}{\pi}\alpha\right)^2\cdot d\alpha}=\sqrt{\frac{E_m^2}{2\pi^3}\int_0^\pi \alpha^2\cdot d\alpha}=\sqrt{\frac{E_m^2}{2\pi^3}\frac{(\pi^3-0)}{3}}=\frac{E_m}{\sqrt{6}}$$

2)Valor promedio:

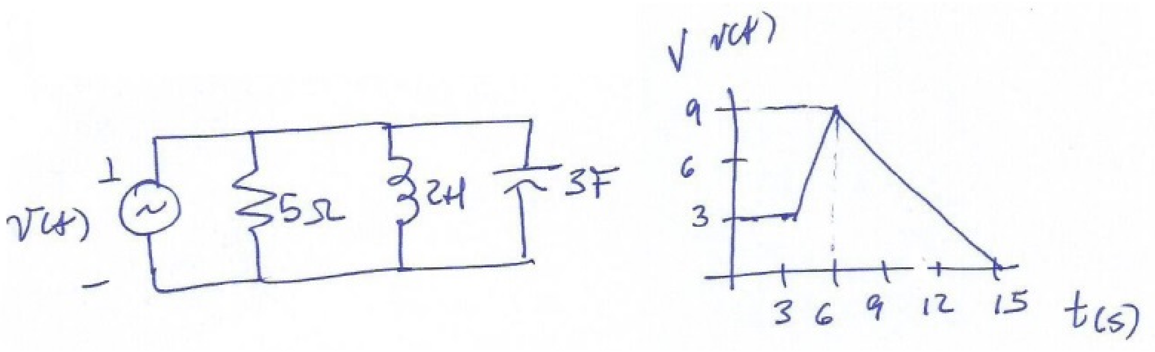
$$E_{prom}=\frac{1}{T}\int_0^T (E(\alpha))\cdot d\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{E_m}{\pi}\alpha\cdot d\alpha=\frac{E_m}{2\pi^2}\int_0^\pi \alpha\cdot d\alpha=\frac{E_m}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2-0}{2}\right)=\frac{E_m}{4}$$

3)Factor de forma:

$$Factor_{form}=\frac{E_{RMS}}{E_{prom}}=\frac{\frac{E_m}{\sqrt{6}}}{\frac{E_m}{4}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=1.6330$$

Problema 2:

Para el circuito mostrado se aplica la tensión que se muestra en la figura:



Determine:

1. Corriente que circula por cada elemento $(i_R(t), i_L(t), i_C(t))$
2. Ecuación que describe la potencia instantánea.
3. Valor eficaz de $i_R(t)$

Solucion:

Primero escribimos la función en el tiempo que describe la tensión que alimenta el circuito.

$$v(t)=\left\{\begin{array}{c} 3 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [0,3] \\ 2\mathrm{t}-3 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [3,6] \\ -t+15 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [6,15] \end{array}\right\}$$

Calculo de las corrientes de cada elemento.

Resistecia:

$$i_R(t)=\frac{v(t)}{R}=\left\{\begin{array}{c} \frac{3}{5} \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [0,3] \\ \frac{2\mathrm{t}-3}{5} \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [3,6] \\ \frac{-t+15}{5} \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [6,15] \end{array}\right\}$$

Capacitor:

$$i_C(t)=C\frac{dv(t)}{dt} \rightarrow i_R(t)=3\cdot\left\{\begin{array}{c} 0 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [0,3] \\ 2 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [3,6] \\ -1 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [6,15] \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} 0 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [0,3] \\ 6 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [3,6] \\ -3 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [6,15] \end{array}\right\}$$

Inductor:

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int v(t)\cdot dt+K \rightarrow i_R(t)=\frac{1}{2}\cdot\left\{\begin{array}{c} 3\mathrm{t}+\tilde{C}_1 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [0,3] \\ t^2-3\mathrm{t}+\tilde{C}_2 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [3,6] \\ \frac{-t^2}{2}+15\mathrm{t}+\tilde{C}_3 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [6,15] \end{array}\right\}$$

$$i_L(t)=\left\{\begin{array}{c} \frac{3\mathrm{t}}{2}+C_1 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [0,3] \\ \frac{t^2}{2}-\frac{3\mathrm{t}}{2}+C_2 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [3,6] \\ \frac{-t^2}{4}+\frac{15\mathrm{t}}{2}+C_3 \leftarrow si\ t\ \ pertenece\ \ a\ [6,15] \end{array}\right\}$$

Evaluando en condiciones iniciales y finales para conseguir las constantes:

$$i_L(0)=0=0+C_1 \rightarrow C_1=0 \rightarrow i_L(3)=\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{9}{2}$$

$$i_L(3)=\frac{9}{2}=\frac{3^2}{2}-\frac{3\cdot 3}{2}+C_2 \rightarrow C_2=\frac{9}{2} \rightarrow i_L(6)=\frac{6^2}{2}-\frac{3\cdot 6}{2}+\frac{9}{2}=\frac{36-18+9}{2}=\frac{27}{2}$$

$$i_L(6)=\frac{45}{2}=\frac{-6^2}{4}+\frac{15\cdot 6}{2}+C_3=\frac{-36}{4}+\frac{90}{2}+C_3 \rightarrow C_3=\frac{45+18-90}{2}$$

$$i_L(t)=\left\{\begin{array}{c} \frac{3\text{t}}{2} \leftarrow si\ \ t\ \ pertenece\ \ a\ [0{,}3] \\ \frac{t^2}{2}-\frac{3\text{t}}{2}+\frac{9}{2} \leftarrow si\ \ t\ \ pertenece\ \ a\ [3{,}6] \\ \frac{-t^2}{4}+\frac{15\text{t}}{2}-\frac{45}{2} \leftarrow si\ \ t\ \ pertenece\ \ a\ [6{,}15] \end{array}\right\}$$

Potencia instantánea:

$$i(t)=i_R(t)+i_C(t)+i_L(t)$$

$$p(t)=v(t)\cdot i(t)=\left\{\begin{array}{c} (3)\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{3\text{t}}{2}\right) \leftarrow si\ \ t\ \ pertenece\ \ a\ [0{,}3] \\ (2\text{t}-t)\cdot\left(\frac{2\text{t}-3}{5}+6+\frac{t^2}{2}-\frac{3\text{t}}{2}+\frac{9}{2}\right) \leftarrow si\ \ t\ \ pertenece\ \ a\ [3{,}6] \\ (-t+15)\cdot(\frac{-t+15}{5}-3\pm\frac{t^2}{4}+\frac{15\text{t}}{2}-\frac{45}{2}) \leftarrow si\ \ t\ \ pertenece\ \ a\ [6{,}15] \end{array}\right\}$$

Agrupando queda:

$$p(t)=\left\{\begin{array}{c} (3)\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{3\text{t}}{2}\right) \leftarrow si\ \ t\ \ pertenece\ \ a\ [0{,}3] \\ (2\text{t}-t)\cdot\left(\frac{t^2}{2}-\frac{11\text{t}}{10}+\frac{99}{10}\right) \leftarrow si\ \ t\ \ pertenece\ \ a\ [3{,}6] \\ (-t+15)\cdot\left(\frac{-t^2}{4}+\frac{73\text{t}}{10}-\frac{45}{2}\right) \leftarrow si\ \ t\ \ pertenece\ \ a\ [6{,}15] \end{array}\right\}\langle W\rangle$$

Problema "4":

Calcule el periodo en segundos de las siguientes señales:

1. $7-4\cos(400t+30°)$
2. $3\text{sen}^2(4t)$

Solucion:

Para el caso 1 se tiene que:

$$w=\frac{2\pi}{T}\rightarrow T=\frac{2\pi}{w}\ como\ w=400\rightarrow T=0.0157\text{seg}$$

La constante 7 no es una señal que oscile en el timepo, las señales DC no influyen en la frecuencia, al igual que el defase de 30° que solo traslada la señal y no la altera en frecuencia.

Para el caso 2:

$$\cos(a\pm b)=\cos(a)\cos(b)\mp sen(a)\,sen(b)\rightarrow sen(a)\,sen(b)=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

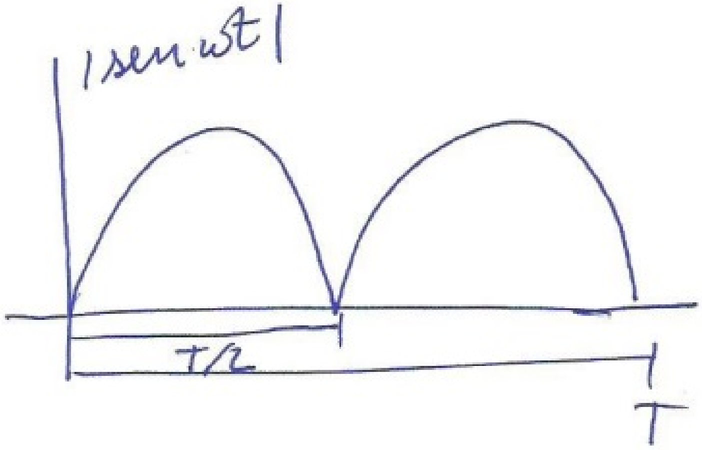
$$sen^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2}\rightarrow 3\text{sen}^2(4t)=\frac{3}{2}-3\cos(8t)\rightarrow w=8\rightarrow T=\frac{2\pi}{w}=0.7853\,seg$$

Problema"5":

Calcule el periodo, valor promedio y el valor eficaz (RMS) de las siguientes señales:

1. $v(t)=V_{DC}+|Vsen(wt+30°)|$
2. $v(t)=30\,Vsen^2(400t)$

En el primer caso, el calor absoluto de una señal alterna hace que su frecuencia se duplique como muestra la figura, por lo que el periodo es π/w



$$Vsen\left(wt+\frac{\pi}{6}\right)=0\rightarrow wt+\frac{\pi}{6}=k\pi\rightarrow wt=\frac{-\pi}{6}+k\pi$$ Por lo que:

$$|Vsen(wt+30°)|=\begin{cases} Vsen(wt+\pi/6)\leftarrow\ si\ \ wt\in[0{,}5\pi/6] \\ -Vsen(wt+\pi/6)\leftarrow\ si\ \ wt\in[5\pi/6,\pi] \end{cases}$$

$$V_{prom}=\frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} v(wt)\,dwt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(V_{DC}+|Vsen(wt+\pi/6)|\right)dwt$$

$$V_{prom}=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} V_{DC}\,dwt+\int_0^{5\pi/6} Vsen(wt+\pi/6)\,dwt-\int_{5\pi/6}^{\pi} Vsen(wt+\pi/6)\,dwt\right)$$

$$V_{prom}=V_{DC}+(V/\pi)\cdot\left(\left(-\cos(\pi)+\cos(\pi/6)\right)-\left(-\cos(7\pi/6)+\cos(\pi)\right)\right)$$

$$V_{prom}=V_{DC}+\frac{V}{\pi}\left(\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\right)=V_{DC}+\frac{V}{\pi}(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+1)=V_{DC}+\frac{2V}{\pi}$$

Valor eficaz

$$V_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} v^2(wt)\,dwt}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(V_{DC}+\left|Vsen(wt+\pi/6)\right|\right)^2 dwt}$$

$$V_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(V_{DC}^2+2V_{DC}\left|Vsen(wt+\pi/6)\right|+\left(Vsen(wt+\pi/6)\right)^2\right)dwt}$$

$$V_{RMS}=\sqrt{V_{DC}^2+2V_{DC}\int_0^{\pi}\left|Vsen(wt+\pi/6)\right|dwt+V^2\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(sen(wt+\pi/6)\right)^2}$$

Ya que se sabe que $\frac{1}{T}\int_0^{T} sen^2(wt+\psi)\,dt=\frac{1}{2}$ y ademas con el resultado de Vprom el cual en parte es la integral del medio, entonces:

$$V_{RMS}=\sqrt{V_{DC}^2+2V_{DC}\left(\frac{2\mathrm{V}}{\pi}\right)+\frac{V^2}{2}}=\sqrt{V_{DC}^2+\frac{4V_{DC}\cdot V}{\pi}+\frac{V^2}{2}}$$

En el segundo caso:

$$v(t)=30\mathrm{sen}^2(400\mathrm{t})=30\,\frac{1-\cos(2\cdot 400\mathrm{t})}{2}=15-\frac{\cos(800\mathrm{t})}{2}\rightarrow w=800\rightarrow T=\frac{2\pi}{w}=0.0078539\,seg$$

$v_{prom}=\frac{1}{T}\int_0^{T} v(t)\,dt=15-\frac{1}{T}\int_0^{T}\cos(wt)\,dt=15$ ya que el coseno esta integrado un periodo.

$v_{rms}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} v^2(t)\,dt}=18.3712$ Usando calculadora.